EQUAZIONE DI DIRAC (e la presunta quarta dimensione)

(una prova dell'essenza oscillatoria dell'universo e dell'essenza tridimensionale della "quarta" dimensione relativistica)

Leonardo ***Rubino***

Gennaio 2019

Abstract : dimostriamo che l'Equazione delle Onde di d'Alembert, quella di Schrodinger, quella di Klein-Gordon e quella di Dirac sono tutte parenti tra loro e denotano l'entità oscillatoria dell'universo. Inoltre, l'Equazione di Klein-Gordon ci fornisce un'interpretazione tridimensionale delle quarte componenti relativistiche e dell'energia di riposo.

Sappiamo dalla relatività che, per l'energia totale E, si ha:

$$E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4 \tag{1.1}$$

Questa è l'espressione, per l'energia, più generale che abbiamo e vale appunto per una particella anche relativistica. Vedere, a tal proposito, il seguente link a pagina 52:
https://scienzaufficialeattendibilita.weebly.com/uploads/1/3/9/1/13910584/la-teoria-della-relativit%C3%80-generale.pdf

Ora, per un fotone, che è poi una « particella » con massa a riposo nulla, si ha $E^2 = p^2c^2$, ossia:

$$E = pc \tag{1.2}$$

Per una particella non relativistiva, sappiamo invece che vale, per la sua energia cinetica, la seguente espressione: $E_k = \frac{1}{2}m_0v^2$, ma quest'ultima è nascosta proprio nella (1.1), che è di valore più generale, appunto. Infatti, la (1.1) può essere così riscritta:

$$E = m_0c^2(1+\frac{p^2}{m_0^2c^2})^{1/2} \tag{1.3}$$

e ricordando che, per gli sviluppi di Taylor, si ha:

$f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} \approx 1+\frac{1}{2}x$, segue che, per la (1.3):

$E = m_0c^2(1+\frac{p^2}{m_0^2c^2})^{1/2} \approx m_0c^2(1+\frac{p^2}{2m_0^2c^2}) = m_0c^2 + \frac{p^2}{2m_0}$ e, per l'energia cinetica, si ha dunque:

$$E_k = E - m_0c^2 = \frac{p^2}{2m_0} = \frac{1}{2}m_0v^2 \text{ cvd.}$$

Consideriamo ora l'espressione generale di un'onda:

$$\Psi = A\cdot e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} = A\cdot e^{i(\frac{2\pi}{\lambda}\hat{k}\cdot\vec{x}-\frac{2\pi}{\lambda}vt)}, \tag{1.4}$$

in quanto: $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\hat{k}$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f = 2\pi\frac{v}{\lambda}$;

Tale onda, contemporaneamente, si propaga nello spazio (x) ed oscilla nel tempo t; infatti, se si pone t=0, si vede che si ha un'oscillazione lungo x ($\Psi = A\cdot e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x})}$) e se si pone x=0 si ha una oscillazione nel tempo ($\Psi = A\cdot e^{-i(\omega t)}$).

Sappiamo inoltre che:

$$E = hf = \frac{h}{2\pi}2\pi f = \hbar\omega \tag{1.5}$$

e, valendo anche la (1.2), si ha:

$pc = \hbar\omega$, da cui :

$$p = \hbar\frac{\omega}{c} = \hbar\frac{2\pi}{\lambda} = \hbar k = p \qquad (1.6)$$

e la (1.4) diventa :

$$\Psi = A \cdot e^{i(\frac{\vec{p}}{\hbar}\cdot\vec{x} - \frac{E}{\hbar}t)} \qquad (1.7)$$

Per semplice sostituzione diretta di tale Ψ nelle seguenti equazioni:

$$(i\hbar\frac{\partial}{\partial t})\Psi = E\Psi = (\hbar\omega)\Psi \qquad (1.8)$$

$$(\frac{\hbar}{i}\nabla)\Psi = \vec{p}\Psi = (\hbar\vec{k})\Psi \; ; \qquad (1.9)$$

si ha che esse danno delle identità, ossia sono giuste.

Nel caso monodimensionale : $(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x})\Psi = p\Psi = (\hbar k)\Psi$; (∇ gradiente)

Dunque, possiamo rilevare le seguenti corrispondenze operatoriali:

$$E \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \qquad (1.10)$$

$$\vec{p} \rightarrow \frac{\hbar}{i}\nabla \qquad (1.11)$$

Valendo poi la (1.2), ossia: $E^2 = p^2c^2$, si ha:

$$(i\hbar\frac{\partial}{\partial t})^2\Psi = c^2(\frac{\hbar}{i}\nabla)^2\Psi, \qquad (1.12)$$

ossia:

$$\boxed{\nabla^2\Psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0} \qquad (1.13)$$

o anche ($\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, laplaciano, divergenza del gradiente): $\Delta\Psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0$,

che è l'**Equazione delle Onde, o di d'Alembert**.

Si noti che tale equazione, di derivazione '' relativistica'' (fotone, ossia particella che si propaga a velocità c e con massa di riposo zero) è invariante per trasformazioni di Lorentz. Si veda, a tal proposito, il seguente link a pagina 55:

https://scienzaufficialeattendibilita.weebly.com/uploads/1/3/9/1/13910584/la-teoria-della-relativit%C3%80-generale.pdf

Passando ora al caso di particelle non relativistiche (gli atomi, ordinariamente, sono tali), otterremo un'equazione ''d'onda'' non relativistica, ossia l'Equazione di Schrodinger. Infatti, se nella (1.7) consideriamo invece non più $E = pc$, ma $E_k = \frac{1}{2}m_0v^2$ (equazione appunto non relativistica), otteniamo:

$$\Psi = A \cdot e^{i(\frac{\vec{p}}{\hbar}\cdot\vec{x} - \frac{E_k}{\hbar}t)} = A \cdot e^{i(\frac{\vec{p}}{\hbar}\cdot\vec{x} - \frac{p^2}{2m_0\hbar}t)} \qquad (1.14)$$

e, proprio come abbiamo fatto per ottenere la (1.12), per sostituzione diretta della (1.14) nella seguente equazione:

$$(i\hbar\frac{\partial}{\partial t})\Psi=(-\frac{\hbar^2}{2m_0}\nabla^2)\Psi \tag{1.15}$$

($(i\hbar\frac{\partial}{\partial t})\Psi=(-\frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{\partial^2}{\partial x^2})\Psi$, nel caso monodimensionale)

si ottiene un'identità. Dunque, la (1.15) è vera. Attenzione, però, perché nella (1.14) abbiamo usato non più una E totale, ma solo la Ek, fatto di cui teniamo conto.

Il primo membro della (1.15) vale $(i\hbar\frac{\partial}{\partial t})\Psi=E_k\Psi$, ma sappiamo che Ek=H-V, da cui, sempre per la (1.15): $-\frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta\Psi=(H-V)\Psi$, ossia:

$$\boxed{\Delta\Psi+\frac{2m_0}{\hbar^2}(H-V)\Psi=0} \tag{1.16}$$

che altro non è che l'**Equazione di Schrodinger**.
Consideriamo ora il caso più generale, ossia particella relativistica e con massa a riposo non nulla.

Come abbiamo fatto in precedenza, visto che per la (1.1) si ha: $E=\sqrt{p^2c^2+m_0^2c^4}$, allora, sostituendo tale E sempre nella (1.7) $\Psi=A\cdot e^{i(\frac{\vec{p}}{\hbar}\cdot\vec{x}-\frac{E}{\hbar}t)}$, si avrà:

$$\Psi=A\cdot e^{i(\frac{\vec{p}}{\hbar}\cdot\vec{x}-\frac{\sqrt{p^2c^2+m_0^2c^4}}{\hbar}t)} \tag{1.17}$$

e, come al solito, sempre per sostituzione, si vede che tale Ψ è soluzione della seguente:

$$\boxed{(\nabla^2\Psi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2})-\frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\Psi=0} \tag{1.18}$$

che altro non è che l'**Equazione di Klein-Gordon** e che è simile a quella di d'Alembert, ma ha un elemento in più.
Proviamo ad effettuare veramente tale sostituzione della (1.17) nella (1.18), per verificare che davvero vale tutto ciò. Si ha che $\nabla^2\Psi=(i)^2\frac{p^2}{\hbar^2}\Psi=-\frac{p^2}{\hbar^2}\Psi$ e

$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}=-\frac{1}{c^2}(-i)^2\frac{E^2}{\hbar^2}\Psi=\frac{1}{c^2\hbar^2}(p^2c^2+m_0^2c^4)\Psi$ e dunque:

$-\frac{p^2}{\hbar^2}\Psi+\frac{1}{c^2\hbar^2}(p^2c^2+m_0^2c^4)\Psi-\frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\Psi=0$, ossia 0=0.

Poniamo ora $l=\frac{m_0c}{\hbar}$; tale l ha le dimensioni del vettore d'onda k. Con tale l, si ha che le (1.17) ed (1.18) si riscrivono così:

$$\boxed{\Psi=A\cdot e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\sqrt{(k^2+l^2)}ct)}=A\cdot e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega't)}} \tag{1.19}$$

$$\nabla^2\Psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} - l^2\Psi = 0 \tag{1.20}$$

con $\boxed{\omega' = \sqrt{(k^2+l^2)}c}$.

La Relatività ci dice dunque che un corpo che ha velocità nulla, rispetto a noi, ha però una quarta componente spaziale pari a ct, una quarta componente del quadrimpulso pari ad mc ed un'energia intrinseca (a riposo) pari ad m_0c^2. Dunque, nel passare dal fotone, che ha m_0 nulla, ad una particella relativistica, che ha massa di riposo m_0, l'equazione d'onda passa dall'essere quella di d'Alembert (1.13) a quella di Klein-Gordon (1.20), con funzione d'onda (1.19) invece che (1.4) e la differenza sta nel fatto che la componente di massa a riposo m_0, che determina l'esistenza di un'energia da "fermo" m_0c^2 (di essenza "quadridimensionale", in quanto compare con la Relatività e col quadrivettore momento-energia) in realtà altro non è che un incremento d'oscillazione temporale, dove si passa da una frequenza angolare ω ad una $\omega' = \sqrt{(k^2+l^2)}c$ superiore! Questa è l'interpretazione tridimensionale di una entità di natura presunta quadridimensionale. Altre obiezioni all'esistenza di una presunta quarta dimensione reale possono essere trovate al seguente link a pag. 23:
https://scienzaufficialeattendibilita.weebly.com/uploads/1/3/9/1/13910584/ovvieta_imbarazzanti-unificazione_gravita_elettromagnetismo.pdf

Riscriviamo ora l'Equazione di Klein-Gordon (1.20) in questo modo:

$$-\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} + c^2\nabla^2\Psi - l^2c^2\Psi = 0 \tag{1.21}$$

e ricordando che $i^2 = -1$ e $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, si ha che tale equazione può essere così riscritta:

$$[i\frac{\partial}{\partial t} - (i\alpha\cdot\nabla - \beta m_0)][i\frac{\partial}{\partial t} + (i\alpha\cdot\nabla - \beta m_0)] = 0, \tag{1.22}$$

ossia anche:

$$\begin{cases} [i\frac{\partial}{\partial t} - (i\alpha\cdot\nabla - \beta m_0)]\Psi = 0 \\ [i\frac{\partial}{\partial t} + (i\alpha\cdot\nabla - \beta m_0)]\Psi = 0 \end{cases} \tag{1.23}$$

e la (1.22) può essere così sviluppata:

$$[-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (\alpha\cdot\nabla)^2 + im_0\beta(\alpha\cdot\nabla) + im_0(\alpha\cdot\nabla)\beta - \beta^2 m_0^2]\Psi = 0 \tag{1.24}$$

Quest'ultima equazione coincide con la (1.21) se:

$\beta^2 = \frac{c^4}{\hbar^2}$, $\alpha\beta + \beta\alpha = 0$, $\alpha_i\alpha_j = c^2$ se i=j e $\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 0$ se $i \neq j$

Le due ultime condizioni sugli alfa impongono che si ottenga proprio solo il ∇^2 e non termini misti in ∇. La (1.23), che qui riscriviamo:

$$\boxed{(i\frac{\partial}{\partial t} + i\alpha\cdot\nabla - \beta m_0)\Psi = 0} \tag{1.25}$$

può essere considerata come l'**Equazione di Dirac**, che solitamente viene presentata nella seguente forma, in unità naturali ($\hbar = c = 1 \rightarrow \beta = 1$):

$$\boxed{(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m_0)]\Psi = 0} \quad , \tag{1.26}$$

dove $i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} = i\gamma^{\mu}\,\partial / \partial x^{\mu}$, che contiene una sommatoria in convenzione di Einstein, fornisce, al variare di μ, la derivata sul tempo $\frac{\partial}{\partial t}$ e su x, y e z di $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$:

$$i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} \rightarrow i\frac{\partial}{\partial t} + i\alpha \cdot \nabla$$

Ulteriori approfondimenti sull'Equazione di Dirac non verranno effettuati, in questa sede.
Grazie per l'attenzione.
Leonardo RUBINO